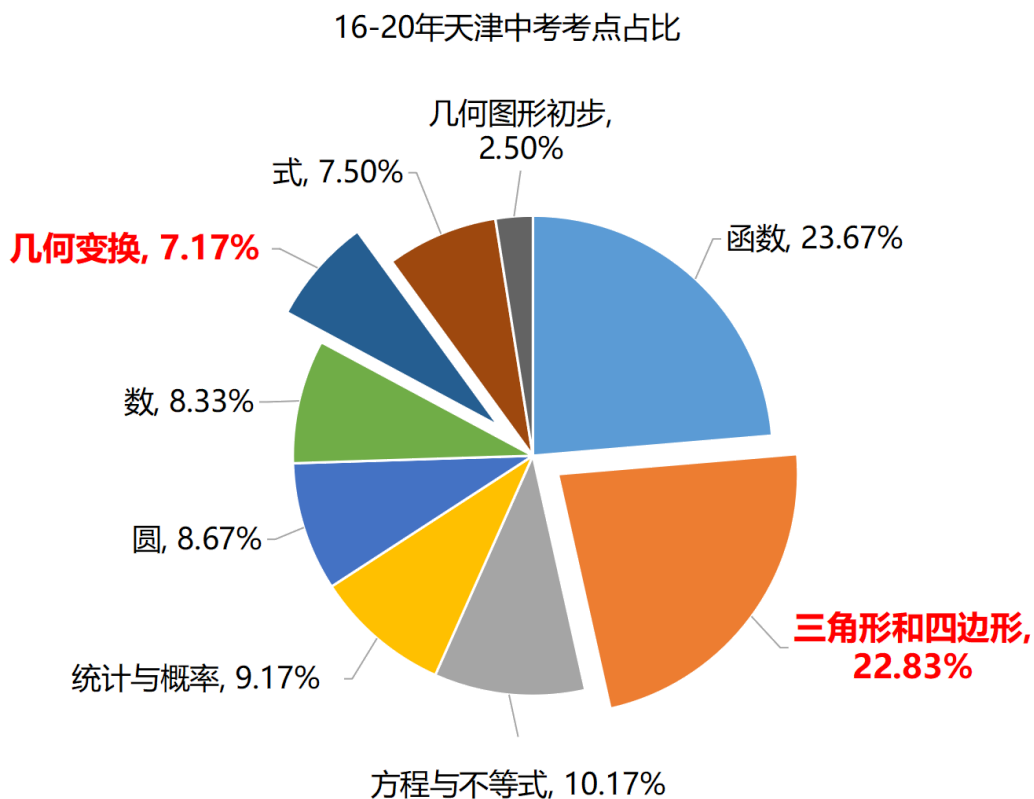


第1讲几何变换之平移

知己知彼

《直角坐标系中的几何变换》属于整个初中数学几何部分的重要知识，包括平移、对称、旋转三大类，综合性较强，需要学生在掌握平面直角坐标系，全等三角形、相似三角形、四边形的性质与判定、函数性质等基础上，进一步探究三大几何变换。本模块的内容在中考中常以24题解答题的形式出现，占10分的分值，题目难度较大，需要学生进行系统的学习、归纳、整理，以提高综合运用能力。

本模块侧重于三大变换的综合应用，适用于几何专题的综合提升，以及直角坐标系中的几何变换的短期突破，故分为几何变换之平移、几何变换之对称、几何变换之旋转 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，突破重点题型。

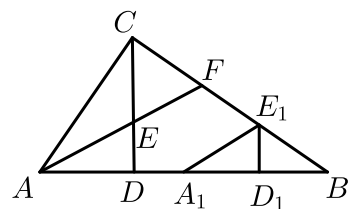


年份	分值	占比	题号	几何变换
2020	10	8%	24	对称变换
2019	10	8%	24	平移变换
2018	10	8%	24	旋转变换
2017	10	8%	24	对称变换
2016	10	8%	24	旋转变换

1. 线段问题

典题精练

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , AF 平分 $\angle CAB$ 交 CD 于 E , 交 BC 于 F .



(1) 求证: $CE = CF$.

(2) 当 $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$ 时, 将 $\triangle ADE$ 沿 AB 平移至 $\triangle A_1D_1E_1$ 的位置, 使 E_1 在 BC 上, 求 BE_1 的长.

2. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB = 6$ ，将一块含有 30° 角的直角三角板 DEF 如图所示放置，让等边 $\triangle ABC$ 向右平移（ BC 只能在 EF 上移动）. 如图1，当点 E 与点 B 重合时，点 A 恰好落在三角板 DEF 的斜边 DF 上.

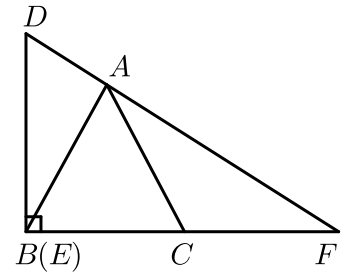


图1

- (1) 若点 C 平移到与点 F 重合，求等边 $\triangle ABC$ 平移的距离；
 (2) 在等边 $\triangle ABC$ 向右平移的过程中， AB ， AC 与三角板斜边的交点分别为 G ， H ，连接 EH 交 AB 于点 P ，如图2.

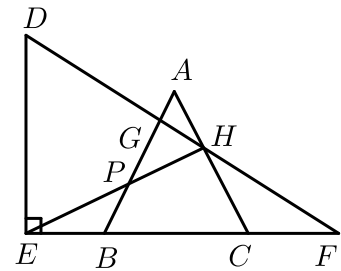
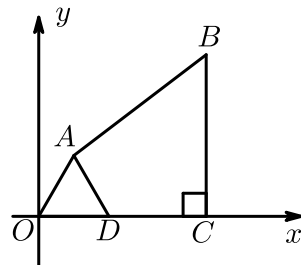


图2

- ① 求证： $EB = AH$ ；
 ② 若 $\angle HEF = 30^\circ$ ，求 EH 的长；
 ③ 判断 PG 的长度在等边 $\triangle ABC$ 平移的过程中是否会发生变化？如果不变，请求出 PG 的长；如果变化，请说明理由.

3. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点，点 C 在 x 轴的正半轴上，且 $BC \perp OC$ 于点 C ，点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ ， $AB = 4\sqrt{3}$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，点 D 是线段 OC 上一点，且 $OD = 4$ ，连接 AD 。



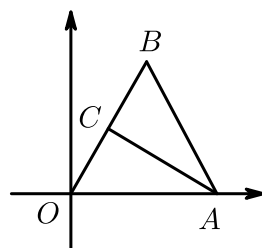
- (1) 求证： $\triangle AOD$ 是等边三角形。
- (2) 求点 B 的坐标。
- (3) 平行于 AD 的直线 l 从原点 O 出发，沿 x 轴正方向平移。设直线 l 被四边形 $OABC$ 截得的线段长为 m ，直线 l 与 x 轴交点的横坐标为 t 。
 - ① 当直线 l 与 x 轴的交点在线段 CD 上（交点不与点 C ， D 重合）时，请直接写出 m 与 t 的函数关系式（不必写出自变量 t 的取值范围）。
 - ② 若 $m = 2$ ，请直接写出此时直线 l 与 x 轴的交点坐标。

2. 线段和差问题

典题精练

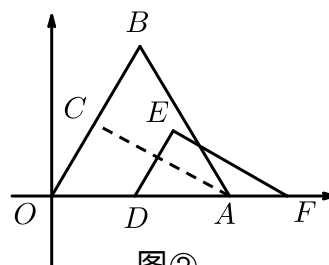
4. 在平面直角坐标系中，点 $A(4, 0)$ 、 B 为第一象限内一点，且 $\triangle OAB$ 为等边三角形， C 为 OB 的中点，连接 AC 。

(1) 如图①，求点 C 的坐标。



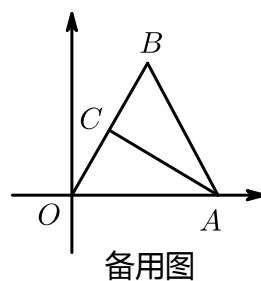
图①

(2) 如图②，将 $\triangle OAC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle DEF$ ，设 $OD = m$ ，其中 $0 < m < 4$ 。



图②

- ① 设 $\triangle OAB$ 与 $\triangle DEF$ 重叠部分的面积为 S ，用含 m 的式子表示。
- ② 连接 BD ， BE ，当 $BD + BE$ 取最小值时，求点 E 的坐标。（直接写结果即可）



备用图

5. 如图1，点 C 是线段 AB 上一点，将 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 CE ，将 CB 绕点 C 旋转，使点 B 的对应点 D 落在 CE 上，连接 BE ， AD ，并延长 AD 交 BE 于点 F 。

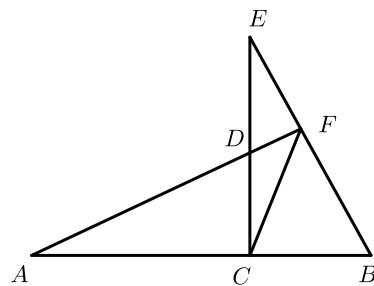


图1

- (1) 求证： $AF \perp BE$.
- (2) 连接 CF ，猜想 AF ， EF ， CF 存在的等量关系，并证明你猜想的结论 .
- (3) 如图2，延长 AB 到 G ，使 $BG = CB$ ，将线段 BG 沿直线 BE 上下平移，平移后的线段记为 $B'G'$ ，若 $\angle ABE = 60^\circ$ ，当 $CB' + CG'$ 的值最小时，请直接写出 $\tan \angle G'CG$ 的值 .

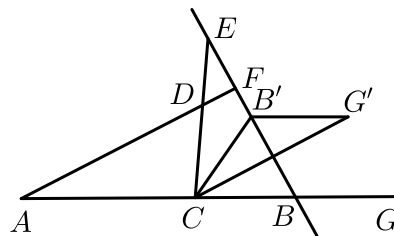
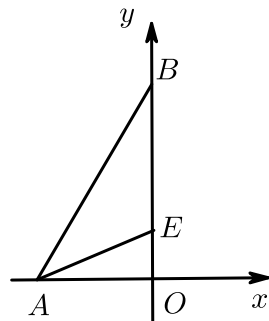


图2

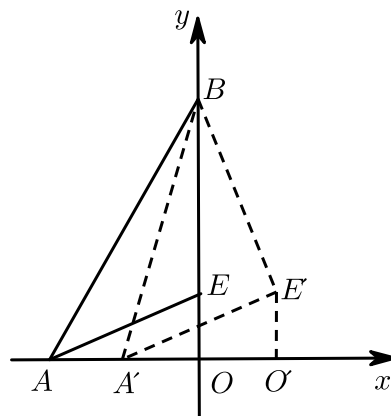
 经典再现

6. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ，点 E 在 OB 上，且 $\angle OAE = \angle OBA$ 。

(1) 如图，求点 E 的坐标。



(2) 如图，将 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'E'O'$ ，连接 $A'B$ 、 BE' 。



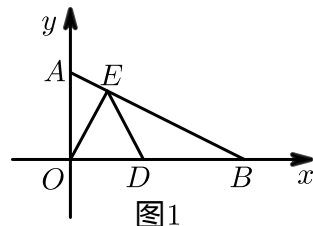
- ① 设 $AA' = m$ ，其中 $0 < m < 2$ ，试用含 m 的式子表示 $A'B^2 + BE'^2$ ，并求出使 $A'B^2 + BE'^2$ 取得最小值时点 E' 的坐标。
- ② 当 $A'B + BE'$ 取得最小值时，求点 E' 的坐标。（直接写出结果即可）

3. 重叠部分面积

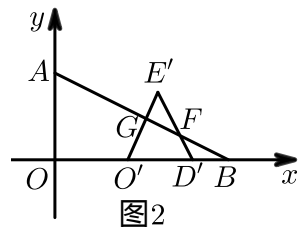
典题精练

7. 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $OB = 4$, 分别以 OA 、 OB 边所在的直线建立平面直角坐标系, D 为 x 轴正半轴上一点, 以 OD 为一边在第一象限内作等边 $\triangle ODE$.

(1) 如图1, 当 E 点恰好落在线段 AB 上时, 求 E 点坐标.



(2) 在(1)问的条件下, 将 $\triangle ODE$ 沿 x 轴的正半轴向右平移得到 $\triangle O'D'E'$, $O'E'$ 、 $D'E'$ 分别交 AB 于点 G 、 F (如图2) 求证 $OO' = E'F$.



(3) 若点 D 沿 x 轴正半轴向右移动, 设点 D 到原点的距离为 x , $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 y , 请直接写出 y 与 x 的函数关系式.

8. 在平面直角坐标系中，两个形状、大小完全相同的三角板 OBC ， DEF ，按如图所示的位置摆放， O 为原点，点 $B(12, 0)$ ，点 B 与点 D 重合，边 OB 与边 DE 都在 x 轴上．其中， $\angle C = \angle DEF = 90^\circ$ ， $\angle OBC = \angle F = 30^\circ$ ．
- (1) 如图①，求点 C 坐标．

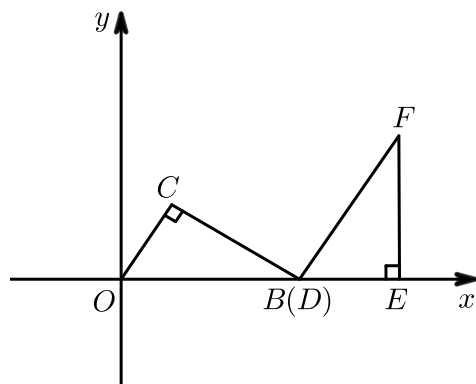


图 ①

- (2) 现固定三角板 DEF ，将三角板 OBC 沿 x 轴正方向平移，得到 $\triangle O'B'C'$ ，当点 O' 落点 D 上时停止运动，设三角板平移的距离为 x ，两个三角板重叠部分的面积为 y ．求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围．

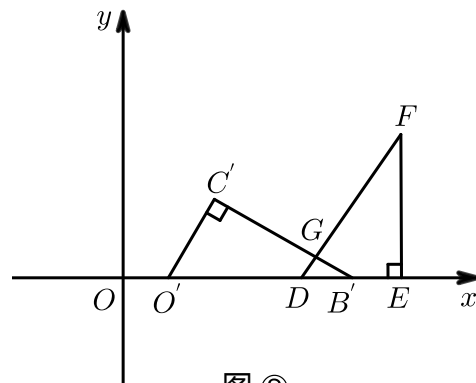
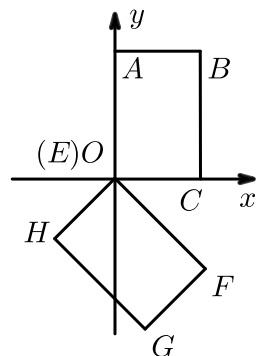


图 ②

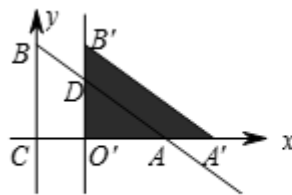
- (3) 在(2)条件下，设边 BC 的中点为点 M ，边 DF 的中点为点 N ．直接写出在三角板平移过程中，当点 M 与点 N 之间的距离最小时，点 M 的坐标（直接写出结果即可）．

9. 如图，矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，点 $A(0, 4)$ ， $C(2, 0)$ ，将矩形 $OABC$ 绕点 O 顺时针方向旋转 135° ，得到矩形 $EFGH$ （点 E 与 O 重合）。

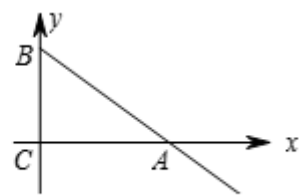


- (1) 若 GH 交 y 轴于点 M ，则 $\angle FOM = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $OM = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 将矩形 $EFGH$ 沿 y 轴向上平移 t 个单位。
- ① 直线 GH 与 x 轴交于点 D ，若 $AD \parallel BO$ ，求 t 的值。
 - ② 若矩形 $EFGH$ 与矩形 $OABC$ 重叠部分的面积为 S 个平方单位，试求当 $0 < t \leq 4\sqrt{2} - 2$ 时， S 与 t 之间的函数关系式。

10. 如图（1），在平面直角坐标系中，已知点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ．沿 x 轴向右平移 $\text{Rt}\triangle ABO$ ，得 $\text{Rt}\triangle A'B'O'$ ，直线 $O'B'$ 与 AB 或 BA 的延长线相交于点 D ．设 $D(x,y)(x > 0)$ ，以点 A, A', B', D 为顶点的四边形面积记为 S ．



图（1）



图（2）

- （1）求 y 与 x 的函数关系式．
- （2）用含 $x(x \neq 4)$ 的式子表示 S ．
- （3）当 $S = \frac{10}{3}$ ，求点 D 的坐标（直接写出结果）．（图2为备用图）

 经典再现

11. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(6,0)$ ，点 B 在 y 轴的正半轴上， $\angle ABO = 30^\circ$ ，矩形 $CODE$ 的顶点 D, E, C 分别在 OA, AB, OB 上， $OD = 2$ 。

(1) 如图①，求点 E 的坐标。

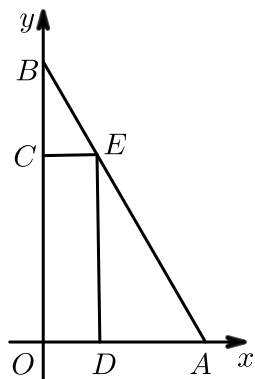


图 ①

(2) 将矩形 $CODE$ 沿 x 轴向右平移，得到矩形 $C'O'D'E'$ ，点 C, O, D, E 的对应点分别为 C', O', D', E' 。设 $OO' = t$ ，矩形 $C'O'D'E'$ 与 $\triangle ABO$ 重叠部分的面积为 S 。

① 图②，当矩形 $C'O'D'E'$ 与 $\triangle ABO$ 重叠部分为五边形时， $C'E', D'E'$ 分别与 AB 相交于点 M, F ，试用含有 t 的式子表示 S ，并直接写出 t 的取值范围。

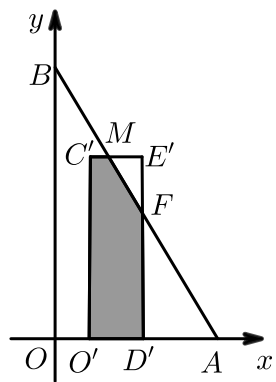


图 ②

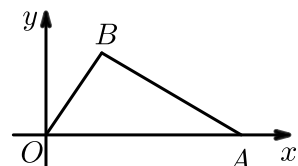
② $\sqrt{3} \leq S \leq 5\sqrt{3}$ 时，求 t 的取值范围（直接写出结果即可）。

4. 存在性问题

典题精练

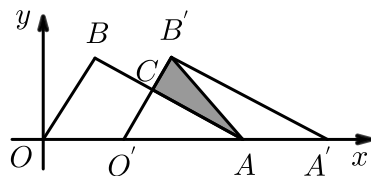
12. 在平面直角坐标系中，点 $A(4, 0)$ ， B 为第一象限内一点，且 $OB \perp AB$ ， $OB = 2$ 。

(1) 如图①，求点 B 的坐标。



图①

(2) 如图②，将 $\triangle OAB$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle O'A'B'$ ，设 $OO' = m$ ，其中 $0 < m < 4$ 。连接 AB' ， AB 与 $O'B'$ 交于点 C 。



图②

- ① 试用含 m 的式子表示 $\triangle AB'C$ 的面积 S ，并求出 S 的最大值。
- ② 当 $\triangle AB'C$ 为等腰三角形时，求点 C 的坐标（直接写出结果即可）。

13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $AD = 8\text{cm}$ ，连接 BD ，将 $\triangle ABD$ 绕 B 点作顺时针方向旋转得到 $\triangle A'B'D'$ (B' 与 B 重合)，且点 D' 刚好落在 BC 的延长线上， $A'D'$ 与 CD 相交于点 E 。

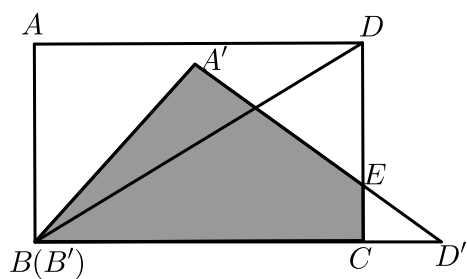


图 1

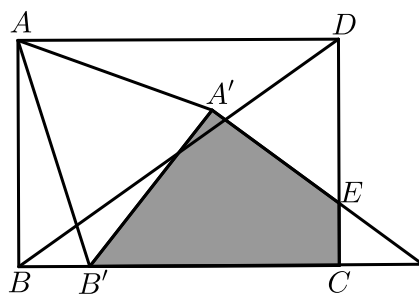
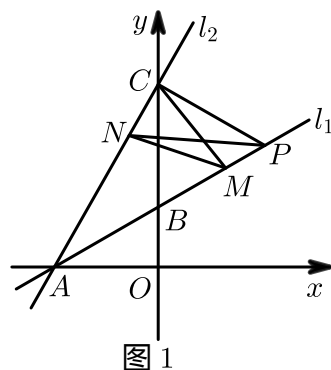


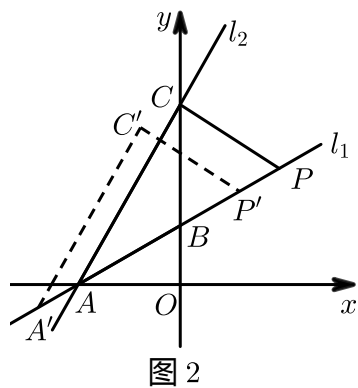
图 2

- (1) 求矩形 $ABCD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 重叠部分(如图1中阴影部分 $\triangle A'B'CE$)的面积。
- (2) 将 $\triangle A'B'D'$ 以每秒 2cm 的速度沿直线 BC 向右平移，如图2，当 B' 移动到 C 点时停止移动，设矩形 $ABCD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 重叠部分的面积为 y ，移动的时间为 x ，求 y 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围。
- (3) 若在(2)的平移过程中，存在这样的时间 x ，使得 $\triangle AA'B'$ 成为等腰三角形，请你直接写出满足条件的 x 的值。

14. 如图1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1, l_2 都经过点 $A(-6, 0)$, 它们与 y 轴的正半轴分别相交于点 B, C , 且 $\angle BAO = \angle ACO = 30^\circ$.



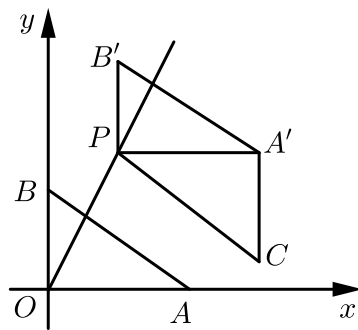
- (1) 求直线 l_1, l_2 的函数表达式.
- (2) 设 P 是第一象限内直线 l_1 上一点, 连接 PC , 有 $S_{\triangle ACP} = 24\sqrt{3}$. M, N 分别是直线 l_1, l_2 上的动点, 连接 CM, MN, NP , 求 $CM + MN + NP$ 的最小值.
- (3) 如图2, 在(2)的条件下, 将 $\triangle ACP$ 沿射线 PA 方向平移, 记平移后的三角形为 $\triangle A'C'P'$, 在平移过程中, 若以 A, C', P 为顶点的三角形是等腰三角形, 请直接写出所有满足条件的点 C' 的坐标.



5. 其他

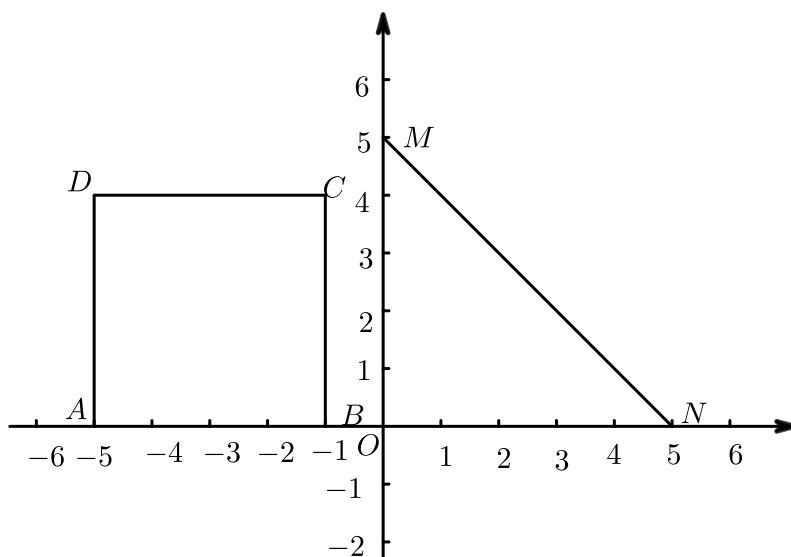
典题精练

15. 如图所示, 直线 $y = kx (x \geq 0)$ 经过点 $P(2, 4)$, 已知点 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 连接 AB , 将 $\text{Rt}\triangle AOB$ 沿 OP 方向平移, 使点 O 移动到点 P , 得到 $\triangle A'PB'$. 以边 PA' 的中点为中心, 将 $\triangle A'PB'$ 按顺时针方向旋转 180° , 得到 $\triangle PA'C$.



- (1) 求 k 的值.
- (2) 连接 $B'C$, 求直线 $B'C$ 的解析式.
- (3) 请直接写出 $\triangle AOB$ 沿 OP 方向平移到 $\triangle A'PB'$ 的过程中, 线段 AB 扫过的面积.

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $A(-5,0)$ ， $B(-1,0)$ ， $M(0,5)$ ， $N(5,0)$ ，连接 MN ，以 AB 为边在 x 轴上方作正方形 $ABCD$ 。



- (1) 直接写出 C ， D 两点的坐标；
- (2) 将正方形 $ABCD$ 向右平移 t 个单位长度，得到正方形 $A'B'C'D'$ 。
- ① 当点 C' 落在线段 MN 上时，结合图形直接写出此时 t 的值；
 - ② 横纵坐标都是整数的点叫做整点。记正方形 $A'B'C'D'$ 和三角形 OMN 重叠的区域（不含边界）为 W ，若区域 W 内恰有3个整点，直接写出 t 的取值范围。